Föreläsning 20

* Greens sats (16.3)

* Gauss sats (16.4)
  (bara en glimt som motivering till efterföljande

* Ytintegraler (15.5)

~~* Flödesintegraler (15.6)~~

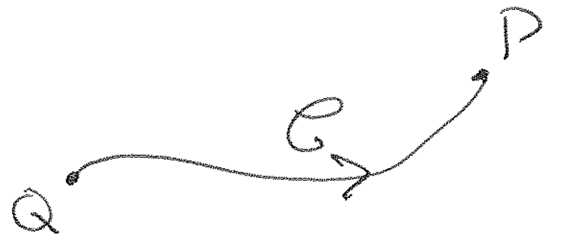
Kom ihåg att vi är ute efter formler som har den allmänna schematiska strukturen:

$$\int_D \text{derivata}(\omega) = \int_{\partial D} \omega$$

för någon d-dim domän D och någon funktion ω.

Om $D = \mathcal{C}$ kurva så har vi analysens huvudsats för linjeintegral:

$$\int_{\mathcal{C}} \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \overbrace{\phi(P) - \phi(Q)}^{\text{"integral" över randpunkter } P, Q \text{ med orientering}}$$



Green's sats i planet (16.3)

~~Sats:~~

Låt D vara en sluten domän i xy-planet vars rand ∂D är en kurva $\mathcal{C}$ som utgörs av en eller flera trevliga slutna kurvor. Låt $\mathbb{F} = \mathbb{F}_1 \mathbb{i} + \mathbb{F}_2 \mathbb{j}$ vara ett trevligt vektorfält.
Då gäller:

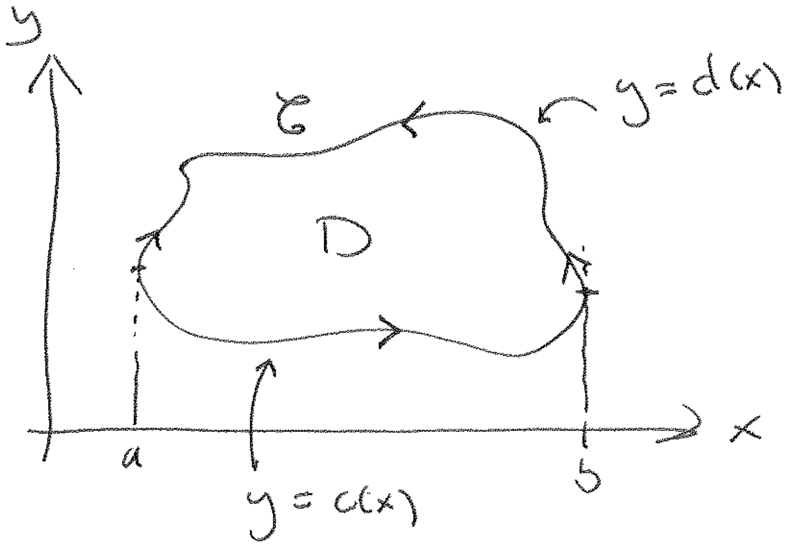
$$\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r}$$

Jämför med vår schematiska form

$$\int_D \text{derivata}(\omega) = \int_{\partial D} \omega$$

Bevis skiss

Kom ihåg att varje domän D kan delas upp i x-enkla eller y-enkla delar. Antag:



Vi kan då beräkna:

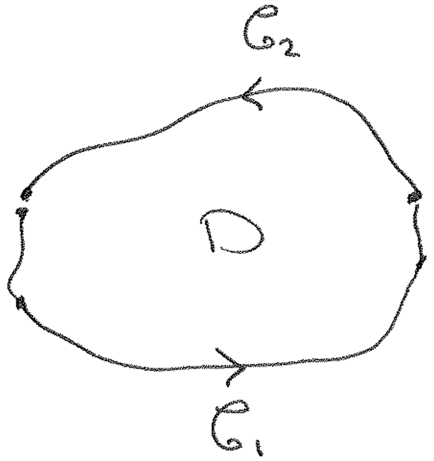
$$\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{c(x)}^{d(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dy$$

$$= \int_a^b \Big(F_1(x, d(x)) - F_1(x, c(x)) \Big)\,dx$$

Låt oss nu studera linjeintegral

$$\int_{C} F_1(x,y)\,dx = \int_{C_1} F_1(x, c(x))\,dx$$

$$+ \int_{C_2} F_1(x, d(x))\,dx$$



$$= \int_a^b \left[F_1(x, c(x)) - F_1(x, d(x))\right] dx$$

$$= -\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy$$

Vi drar därför slutsatsen:

$$-\iint_D \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_C F_1(x,y)\,dx$$

Om vi nu slicer upp domänen på motsatt sätt kan vi på samma vis visa att:

$$\iint_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{\mathcal{C}} F_2(x,y)\,dy$$

och alltså har vi visat:

$$\boxed{\iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA = \oint_{\mathcal{C}} \mathbb{F}\cdot d\mathbb{r}}$$

$\square$

Kommentarer

* Kombinationen av derivator:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

i Green's formel kan skrivas som en skalärprodukt:

$$\boxed{\operatorname{curl}(\mathbb{F}) \cdot \mathbb{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}$$

där vi definierat <u>rotationen</u> <u>av $\mathbb{F}$</u>:

$$\operatorname{curl}(\mathbb{F}) = \nabla \times \mathbb{F}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} = 0 \\ F_1 & F_2 & F_3 = 0 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbb{k}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

* En annan användbar "derivata" av ett vektorfält är "divergensen":

$$\operatorname{div}(\mathbb{F}) = \nabla \cdot \mathbb{F} = \underbrace{\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial x}}_{\text{skalär}}$$

* Jämför detta med gradient av en funktion som är en vektor:

$$\operatorname{grad}(\phi) = \nabla \phi = \underbrace{\frac{\partial \phi}{\partial x} \mathbb{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \mathbb{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \mathbb{k}}_{\text{vektor}}.$$

* Det finns en hel mängd användbara identiteter mellan div, grad och curl:

* $\nabla \cdot (\phi \mathbb{F}) = (\nabla \phi) \cdot \mathbb{F} + \phi (\nabla \cdot \mathbb{F})$

* $\nabla \times (\phi \mathbb{F}) = (\nabla \phi) \times \mathbb{F} + \phi (\nabla \times \mathbb{F})$

* $\nabla \cdot (\mathbb{F} \times \mathbb{G}) = (\nabla \times \mathbb{F}) \cdot \mathbb{G} - \mathbb{F} \cdot (\nabla \times \mathbb{G})$

* $\nabla \times (\mathbb{F} \times \mathbb{G}) = (\nabla \cdot \mathbb{G}) \mathbb{F} + (\mathbb{G} \cdot \nabla) \mathbb{F}$
  $- (\nabla \cdot \mathbb{F}) \mathbb{G} - (\mathbb{F} \cdot \nabla) \mathbb{G}$

* $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = 0$ (div curl = 0)

* $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ (curl grad = 0)

Se kap. 16.2 för mer om dessa.

Låt oss bevisa en av dessa för skojs skull.

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbb{F}) = \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla \cdot \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbb{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbb{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbb{k} \right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

$$= \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z}} + \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x}}$$

$$+ \cancel{\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x}} - \cancel{\frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y}}$$

$$= 0 \qquad \square.$$

Vektorpotentialer

Om ett vektorfält $\mathbb{F}$

kan skrivas som

$(\nabla \times (\mathbb{A} + \nabla\phi) = \nabla \times \mathbb{A})$

$$\mathbb{F} = \operatorname{curl} \mathbb{A} = \nabla \times \mathbb{A}$$

för någon vektor $\mathbb{A}$ så kalls

$\mathbb{A}$ för vektorpotential. Ej unik?

Gauss sats (16.4)

Vi tittar återigen på vår allmänna formel:

$$\int_D \text{derivata}(\omega) = \int_{\partial D} \omega$$

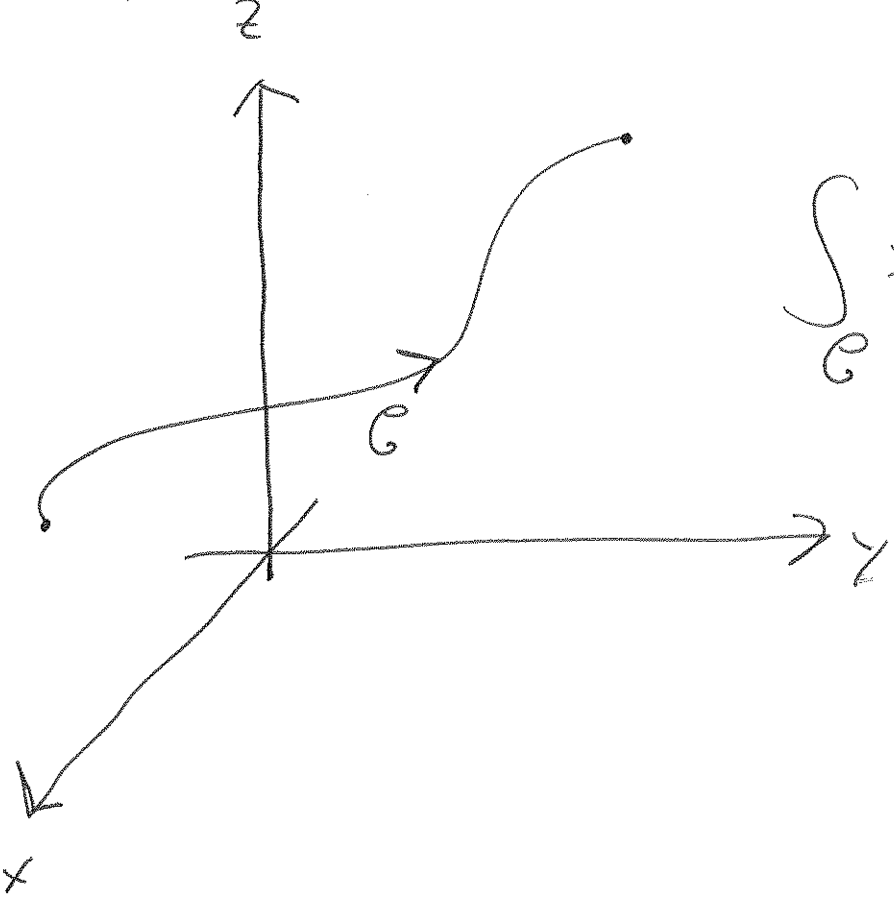
Vad får vi om D är en 3dim. domän? Gauss sats!

$$\boxed{\iiint_D \operatorname{div} \mathbb{F}\, dV = \oiint_{S=\partial D} \mathbb{F} \cdot \hat{N}\, dS}$$

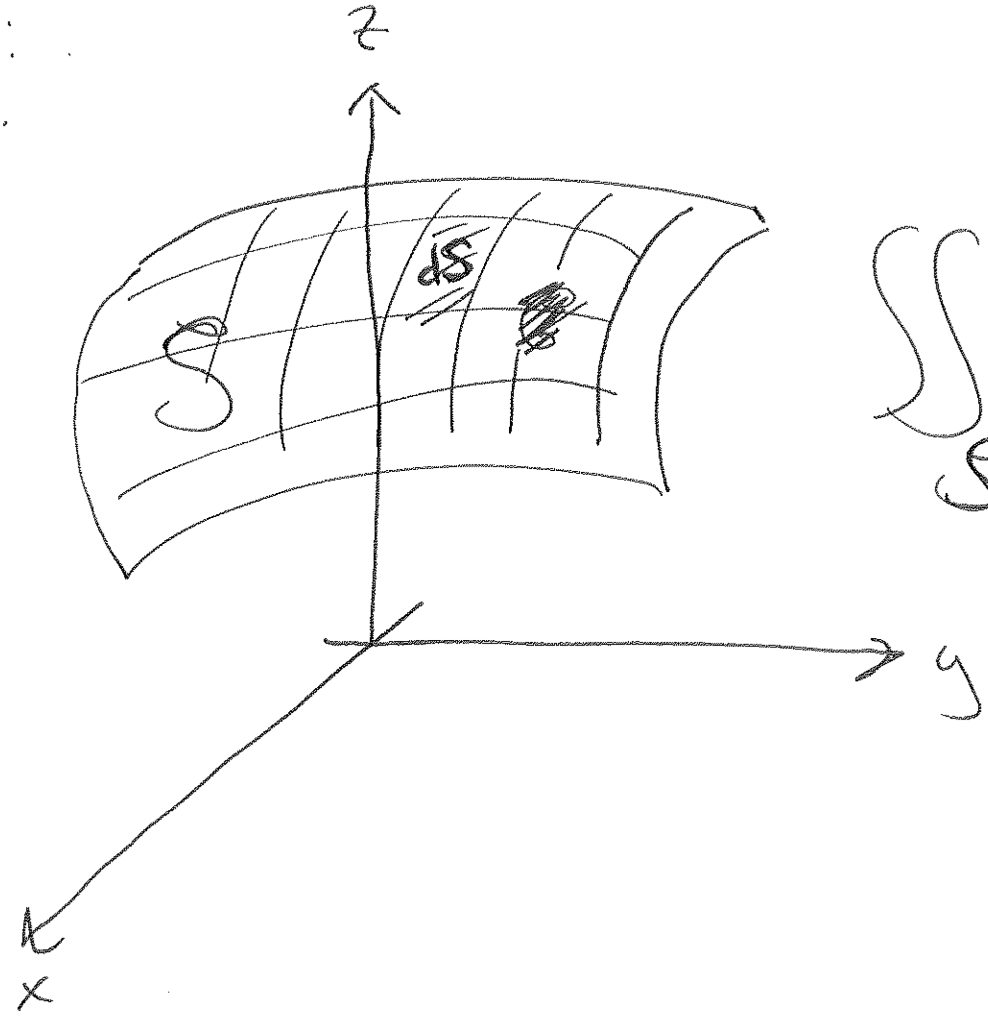
I vänsterledet har vi en vanlig trippelintegral över $\operatorname{div} \mathbb{F} = \nabla \cdot \mathbb{F}$.
Men i högerledet har vi något nytt: en ytintegral, dvs. generalisering av linjeint.

Ytintegraler (15.5)

Vi vill nu generalisera linjeintegraler till ytintegraler, där vi integrerar över ytor i $\mathbb{R}^3$ istället för kurvor.



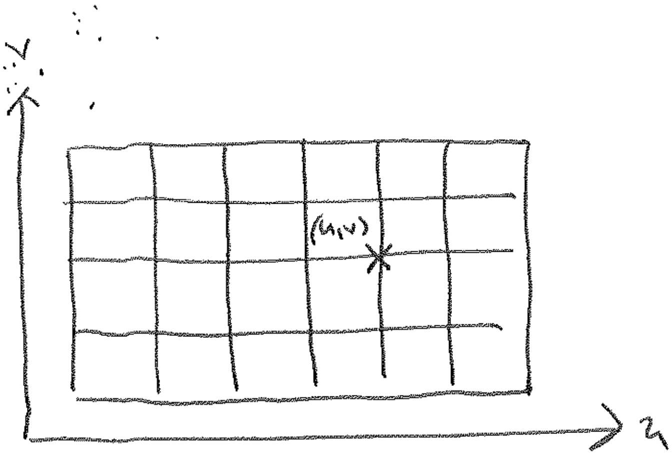
$$\int_C f(x,y,z)\,ds$$



$$\iint_S f(x,y,z)\, dS$$

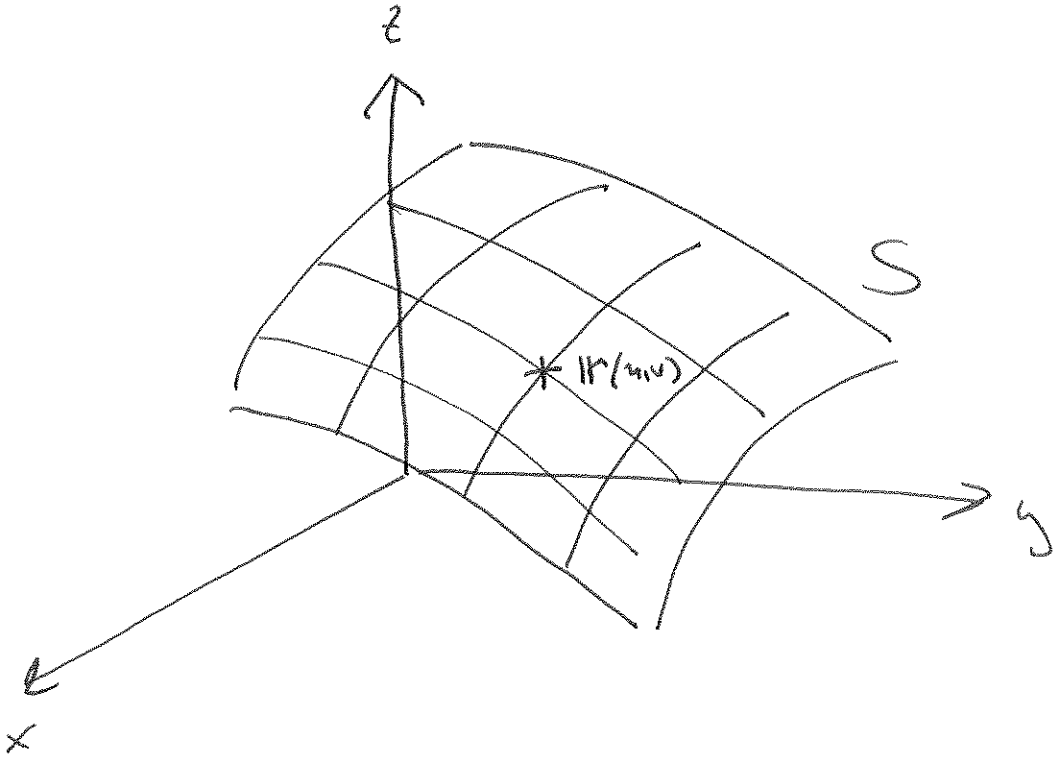
dS = infinitesimalt areaelement på den krökta ytan S.

Naturligt att söka en parametrisering av ytan precis som vi tidigare gjort för kurvor.



En yta med intrinsik koord.-system (u,v).

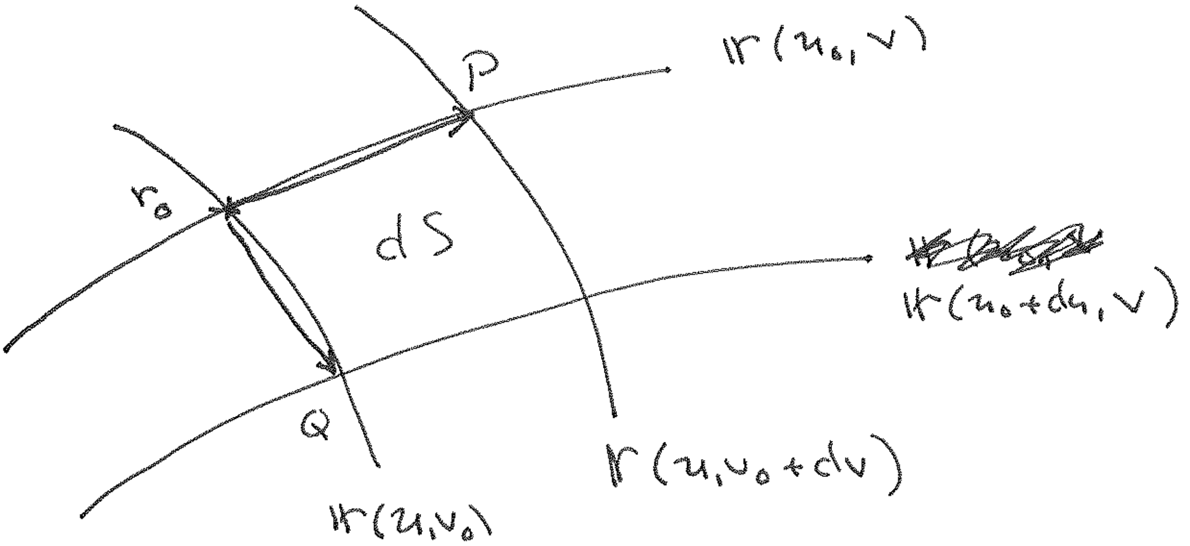
Bädda in ytan i $\mathbb{R}^3$.



Positionsvektor för punkter på ytan:

$$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$$

Arealementet fås på precis samma sätt som när vi beräknade arean av ett parallellogram.



Approximera dS med parallellogramet som spänns av $\overrightarrow{r_0P}$ & $\overrightarrow{r_0Q}$. I gränsen då du och dv blir små blir felet försumbart:

$$dS = \left| \overrightarrow{r_0Q} \times \overrightarrow{r_0P} \right|$$

Skriv nu vektorerna som:

$$\overrightarrow{r_0 Q} = dx\,\mathbb{i} + dy\,\mathbb{j} + dz\,\mathbb{k}$$

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv$$

Längs $\overrightarrow{r_0 Q}$ har vi $dv = 0$

$$\rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}du \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}du \end{cases}$$

$$\rightarrow \overrightarrow{r_0 Q} = \frac{\partial x}{\partial u}du\,\mathbb{i} + \frac{\partial y}{\partial u}du\,\mathbb{j} + \frac{\partial z}{\partial u}du\,\mathbb{k}$$

P_0 Somme siH fis:

$$\overrightarrow{r_0 P} = \frac{\partial x}{\partial v} dv\,\mathbb{i} + \frac{\partial \cancel{x}}{\partial v} dv\,\mathbb{j} + \frac{\partial z}{\partial v} dv\,\mathbb{k}$$

$$\Rightarrow dS = \left\| \overrightarrow{r_0 Q} \times \overrightarrow{r_0 Q} \right\|$$

$$= \left| \begin{vmatrix} \mathbb{i} & \mathbb{j} & \mathbb{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & \frac{\partial z}{\partial u} du \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{vmatrix} \right|$$

$$= \Big| \mathbb{i} \left(\frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} du\,dv - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du\,dv \right)$$

$$\mathbb{j} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} du\,dv - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} du\,dv \right)$$

$$\mathbb{k} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} du\,dv - \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} du\,dv \right) \Big|$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}\ du\,dv.$$

där

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

etc.

Detta innebär att totala arean på S är:

$$\text{Area}(S) = \iint_S dS$$

generalisering av kurvlängd

Notera att:

$$|\overrightarrow{r_0Q} \times \overrightarrow{r_0P}| = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| du\,dv$$

Mer allmänt skriver vi ytintegral av $f(x,y,z)$ som:

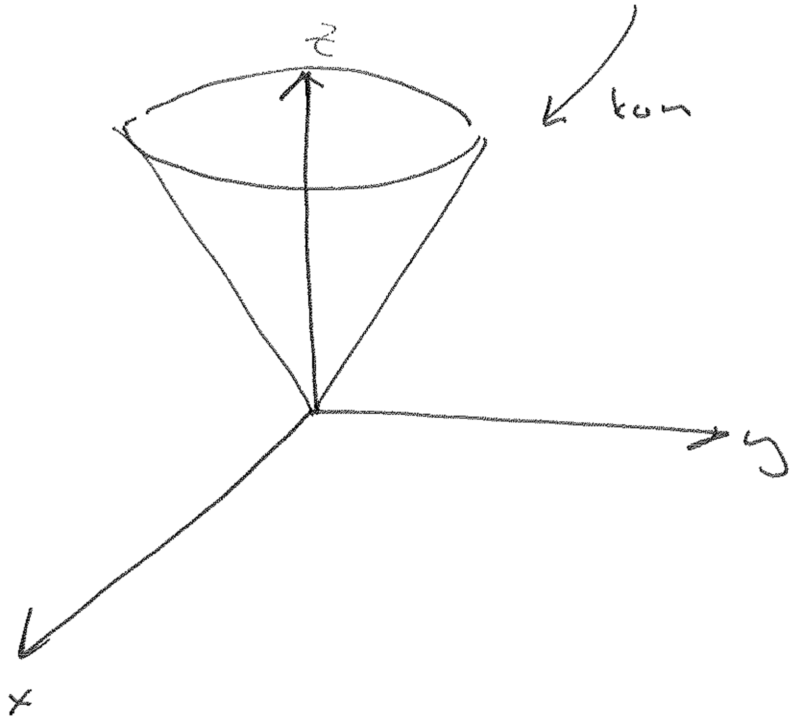
$$\boxed{\underbrace{\iint_S f(x,y,z)\,dS}_{\text{ytintegral}}} = \underbrace{\iint_D}_{\substack{\text{vanlig}\\ \text{dubbelint.}}} f(\mathbf{r}(u,v)) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

välj en parametrisering

Detta generaliserar ~~dubbeltdir~~ linjeintegralen:

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t)) \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$$

Ex. Studera $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$



$0 \leq z \leq 1$

Parametrisera: $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + f(x,y)\,\mathbf{k}$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbf{r}(u,v) = u\,\mathbf{i} + v\,\mathbf{j} + f(u,v)\,\mathbf{k}$$
$$\{u^2+v^2 \leq 1\}$$

$$dS = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right| du\,dv$$

$$= \sqrt{\underbrace{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2}_{=1} + \underbrace{\left(\frac{\partial(x,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}_{\frac{\partial f}{\partial v}} + \underbrace{\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2}_{\frac{\partial f}{\partial u}}}\; du\,dv$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}\; du\,dv$$